数理解析研究所講究録
362巻 1979年 114-123

正規イデアルのprecipitousnessを保持するCohen拡大の一条件について

神大 教養　角田 譲

1. 問題の提起. MをZFCの推移的模型, $s \in M$で, $s \neq \phi$とする。s上のM-ultrafilterとは次のもの$\mathcal{U}$を意味する.

i) $\mathcal{U} \subseteq P(s) \cap M$,

ii) $A \in \mathcal{U} \wedge A \subseteq B \in P(s) \cap M \longrightarrow B \in \mathcal{U}$,

iii) $A \in \mathcal{U} \wedge B \in \mathcal{U} \longrightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$

iv) $A \in P(s) \cap M \longrightarrow A \in \mathcal{U} \vee s - A \in \mathcal{U}$

v) $\mathcal{U} \neq P(s) \cap M$.

$\mathcal{U}$が必ずしもMに属するという事はない事に注意されたい

${}^{s}M \cap M = \{f;\ f: s \to M \wedge f \in M\}$に対して次の様に同値関係を定義する.

$$f \sim g \iff \{x \in s;\ f(x) = g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

${}^{s}M \cap M/\sim$に対して二項関係Eを次の様に定義する.

$$[f] E [g] \iff \{x \in s;\ f(x) \in g(x)\} \in \mathcal{U}.$$

よって, 構造$\mathfrak{Ult}_{\mathcal{U}}(M) = \langle {}^{s}M \cap M/\sim ; E \rangle$が定義される.

通常のultrapowerの様にŁośの定理が成立する.

さて, V を the ground model, P を V の中の partially ordered set とする. S を V の non-empty set, G を P に関する generic filter over V とする. さらに, W を S 上の $V[G]$-ultrafilter とする. その時, $W' = \{A \in P(S) \cap V : A \in W\}$ は, 明らかに, S 上の V-ultrafilter となる. ゆえに, $\langle M : E\rangle = Ult_{W'}(V)$ が構成される. $j : \langle V : \in\rangle \to \langle M : E\rangle$ を標準的な elementary embedding とすると, $j(P)$ は $\langle M : E\rangle$ の中における p.o. set である. 次に, $Ult_W(V[G])$ を考える. その時, 多分は, $\langle M_W[H] : E_W\rangle$ なる形になっているであろう. そこで我々は次の一般的な形の問題を考える事にする. $\langle M : E\rangle$ と $\langle M_W : E_W\rangle$ に, 標準的な isomorphism が存在し, その isomorphism による H の image が丁度, $j(P)$-generic over M となり, $Ult_W(V[G])$ と $\langle M[H'] : E\rangle$ が同型となる (但し, ここでの H' は isomorphism による H の像). 即ち,

$$\begin{tikzcd}
 & & Ult_W(V[G]) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \langle M[H'] : E\rangle \\
 & V[G] \arrow[ur, "\text{ultrapower extension}"] & & \\
 & & & Ult_{W'}(V) = \langle M : E\rangle \arrow[uu, "\text{generic extension}"'] \\
 & V \arrow[uu, "\text{generic extension}"] \arrow[urr, "\text{ultrapower extension}"'] & &
\end{tikzcd}$$

がある意味で可換となる事.

我々は, 上の問題が肯定的である一つの条件について考え, その応用を述べる事にする.

2. Generic ultrapower. 今 S を non-empty set，I を S 上の ideal とする．R_I として $\{A \subseteq S;\ A \notin I\}$ なる集合を意味し，R_I を set of forcing conditions と考える時には，A, B R_I に対し，$A \subseteq B$ をもって A の情報の方が B の情報より多くの情報をもっているものとする．

さて，V を the ground model として，W_I を R_I-generic over V とする．その時，次の補題が成立する．

補題 1. W_I は，S 上の V-ultrafilter で，I の dual filter を含む．

次に，I を，regular uncountable cardinal κ 上の，non-principal κ-complete ideal on κ とする．その時，次が成立する．

補題 2. W_I は，κ 上の V-κ-complete non-principal V-ultrafilter となる．

ここで，V-κ-complete とは，次の条件が成立している事をいう：

$$\langle A_\xi ; \xi < \zeta \rangle \in V,\ \zeta < \kappa,\ (\forall \xi < \zeta)\, A_\xi \in W_I \implies \bigcap_{\xi < \zeta} A_\xi \in W_I.$$

さらに，I が，κ 上の normal ideal であれば，

補題 3. W_I は V-normal となる．

ここで、W_I が V-normal であるとは：

$f\in V$, $f:\kappa\to\kappa$, $(\forall\xi<\kappa)(f(\xi)<\xi)$

$\Rightarrow (\exists\zeta<\kappa)\{\xi<\kappa : f(\xi)=\zeta\}\in W_I$.

補題2, 補題3 より、次の事が簡単に言える

補題4. i) I が κ 上の non-principal κ-complete ideal であれば、$Ult_{W_I}(V)$ は、order type κ の $Ord^{(Ult_{W_I}(V))}$ の initial segment を持つ.

ii) I が normal であれば、$[id_\kappa]$ は $Ult_{W_I}(V)$ の κ-th ordinal となる.

3. 問題の一つの条件. κ を regular uncountable cardinal, I を κ 上の normal ideal, P を κ-chain condition を満たす p.o. set とする. J を P に関する Cohen extension $V[G]$ の中での I によって生成される ideal とする. J が $V[G]$ において κ 上の normal ideal となる事は, P が κ-chain condition を満たす事より判る.

補題1. W を $V[G]$ の R_J-generic filter とする. その時, $W_I=\{A\in P(\kappa)\cap V ; A\in W\}$ は, V 上の R_I-generic filter となる.

(証明). W_I が, κ 上の V-ultrafilter となる事は明らかである. W_I が I の dual filter を含む事も明らかである. $\mathcal{X}\in V$ を, I-分割とする. —即ち— R_I の部分集合で次の事を満たす

極大集合である : $X, Y \in \mathcal{X}, X \neq Y \Rightarrow X \cap Y \in I$.

$\mathcal{X}$ が J-分割である事を示す。$A \notin J$ とする。$p_0 \in G$ を $p_0 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ である様に選ぶ。$Y = \{p \in P : p$ と p_0 は、incompatible, 又は、$p \le p_0$ で $p \Vdash X \cap \dot{A} \notin \dot{J}$ なる $X \in \mathcal{X}$ が存在する$\}$ とおく。Y が P で dense である事をいう。$p \in P$ とせよ。p と p_0 は compatible としてよい。$p_1 \in P$ を $p_1 \le p$, $p_1 \le p_0$ とする。$p_1 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ であるので、$B = \{\alpha < \kappa : p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}\} \notin I$. しかるに、$\mathcal{X}$ が I-partition である事より、$X \in \mathcal{X}$, $B \cap X \notin I$ なる X が存在する。今 $p_1 \Vdash \dot{A} \cap X \in \dot{J}$ とする。P が κ-chain condition を満たす事より、$\kappa - D \in I$, $p_1 \Vdash \dot{A} \cap X \cap D = \emptyset$ なる D が存在する。$B \cap X \notin I$ であるので、$D \cap B \cap X \neq \emptyset$. $\alpha \in D \cap B \cap X$ とする。$\alpha \in D \cap X$ であるので、$p_1 \Vdash \alpha \notin A$, $\alpha \in B$ であるので、$p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}$. これは矛盾である。よって、$p_1 \nVdash \dot{A} \cap X \notin \dot{J}$. それゆえ、$p_2 \Vdash \dot{A} \cap X \notin \dot{J}$ なる $p_2 \le p_1$ が存在する。よって、Y が P で dense である事がいえた。$p \in G \cap Y$ とする。$p_0 \in G$, (p と p_0 は compatible であるので) よって、$p \le p_0$ で $p \Vdash X \cap \dot{A} \notin \dot{J}$ なる $X \in \mathcal{X}$ が存在する。よって、ある $X \in \mathcal{X}$ に対して、$X \cap A \notin J$. 即ち、$\mathcal{X}$ は J-partition である。W が R_J-generic であるので、$X \in W \cap \mathcal{X}$ なる X が存在する。それで、$X \in W_I \cap \mathcal{X}$. W_I は V 上の R_I-generic filter である。

$j : \langle V : \in \rangle \to \langle M : E \rangle = Ult_{W_2}(V)$ を canonical elementary embedding とする. $H \subseteq ext(j(P))$ を, 次の様に定義する ($ext(j(P)) = \{x \in M ; x E j(P)\}$):

$[\langle q_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle] \in ext(j(P))$ とする. その時,

$$[\langle q_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle] \in H \text{ iff } \{\alpha < \kappa ; q_\alpha \in G\} \in W.$$

補題2. H は, $j(P)$-generic over $\langle M : E \rangle$.

(証明). 次の i), ii), iii) を証明すれば良い. i)と ii) は明らかである. iii)を示す為に, $X \in M$ を $\langle M : E \rangle \models$ "X は $j(P)$ の dense subset" とする. $\langle X_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle \in V$ を $X = [\langle X_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle]$, X_α は P の dense subset, $\alpha < \kappa$ である様に選ぶ.

$\mathcal{X} = \{A \notin J ; (\exists \langle q_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle \in V)(q_\alpha \in X_\alpha, \forall \alpha < \kappa, A \subseteq \{\alpha < \kappa ; q_\alpha \in G\})\}$ と, $V[G]$ の中で定義する. $\mathcal{X}$ が R_J で dense である事を証明する. $A \in P(\kappa) \cap V[G]$, $A \notin J$ とする. $p_0 \in G$ を $p_0 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ と選ぶ.

$Y = \{p \in P ; p$ と p_0 は incompatible, または, $p \leq p_0$ で $(\exists \langle q_\alpha ; \alpha < \kappa \rangle)(q_\alpha \in X_\alpha, \forall \alpha < \kappa, p \Vdash \{\alpha < \kappa ; q_\alpha \in \dot{G}\} \cap \dot{A} \notin \dot{J})\}$

明らかに, $Y \in V$ である. Y が P で dense である事を示う. $p \in P$ とする. p と p_0 は compatible として良い. $p_1 \in P$ を $p_1 \leq p$, $p_1 \leq p_0$ とする. $p_1 \Vdash \dot{A} \notin \dot{J}$ であるので, $B = \{\alpha < \kappa ; p_1 \nVdash \alpha \notin \dot{A}\} \notin I$ である.

その時，$\langle q_\alpha : \alpha<\kappa\rangle$ を次の条件を満たす様に選ぶ事ができる

(a) $q_\alpha \le p_1$，$\alpha<\kappa$.

(b) $q_\alpha \in X_\alpha$，$\alpha<\kappa$.

(c) $q_\alpha \Vdash \alpha\in A$，$\alpha\in B$.

$p_1 \Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha \in \dot{G}\}\cap A \in \check{J}$ とする．P が κ-chain condition を満たしている事より $p_1 \Vdash \{\alpha<\kappa : q_\alpha\in\dot{G}\}\cap\dot{A}\cap D=\phi$ なる $\kappa - D\in I$ が存在する．$B\notin I$ であるので，$B\cap D\neq\phi$. $\alpha\in B\cap D$ とせよ．(c)により $q_\alpha \Vdash \alpha\in D\cap A$，(a)により，$q_\alpha \Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha\in\dot{G}\}\cap\dot{A}\cap D=\phi$．その事より $q_\alpha \Vdash q_\alpha\notin G$. これは矛盾である．よって，$p_2\le p_1$，$p_2\Vdash \{\alpha<\kappa ; q_\alpha\in\dot{G}\}\cap\dot{A}\notin J$ なる p_2 が存在する．その時，$p_2\in Y$，$p_2\le p$．よって Y は P で dense である．$p\in Y\cap G$ とする．$p_0\in G$ であるので，p_0 と p は compatible である．それ故，$(\forall\alpha<\kappa)(q_\alpha\in X)$，$C=\{\alpha<\kappa ; q_\alpha\in G\}\cap A\notin J$ なる $\langle q_\alpha : \alpha<\kappa\rangle$ が存在する．その時，$C\in\mathscr{X}$，$C\subseteq A$．よって，$\mathscr{X}$ は R_J で dense である．W が R_J-generic over $V[G]$ である事より，$\mathscr{X}\cap W\neq\phi$．$A\in W\cap\mathscr{X}$ とする．$(\forall\alpha<\kappa)(q_\alpha\in X_\alpha)$，$A\subseteq\{\alpha<\kappa : q_\alpha\in G\}$ なる $\langle q_\alpha : \alpha<\kappa\rangle\in V$ が存在する．その事より，$\{\alpha<\kappa : q_\alpha\in G\}\in W$，即ち，$q=[\langle q_\alpha : \alpha<\kappa\rangle]\in H$，$q\in ext(X)$．よって H は $j(P)$-generic over $\langle M : E\rangle$ である

$\langle M[H]; E\rangle$ を $\langle M; E\rangle$ の generic extension とする。elementary embedding $\tilde{j}: \langle V[G]; E\rangle \to \langle M[H]; E\rangle$ を次の様に定義する。$x \in V[G]$ とする。$\dot{x}$ を $i_G^V(\dot{x}) = x$ なる term とする。$\tilde{j}(x) = i_H^M(j(\dot{x}))$ とする。$p \in G \Leftrightarrow j(p) \in H$, $p \in P$ である事を考えれば、$\tilde{j}$ が well-defined である事が判る。同様の事実により、$\tilde{j}$ は j の拡張で elementary embedding となる。

補題3. $W = \{A \in P(\kappa) \cap V[G] : \langle M[H]; E\rangle \models \kappa_H \in \tilde{j}(A)\}$.

$i_W: (V[G]; \in) \to Ult_W(V[G])$ を canonical embedding とする。$k: Ult_W(V[G]) \to \langle M[H]; E\rangle$ を次の様に定義する：$[f]_W \in Ult_W(V[G])$. $k([f]_W) = \tilde{j}(f)(\kappa)$. 補題3を使用して、次の事を証明できる。

補題4. k は同型である

$$\begin{tikzcd} & Ult_W(V[G]) \arrow[d, "k"] \\ V[G] \arrow[ur, "i_W"] \arrow[r, "\tilde{j}"'] & M[H] \\ V \arrow[u, "\cup\!\mid"] & M \arrow[u, "\cup\!\mid"'] \end{tikzcd}$$

ゆえに我々は§1で提起した問題に解答を与える一条件を、得た事になる。

4. 応用.

§3で得た結果より、次の定理が得られる。

定理1. κを regular uncountable cardinal, Iを normal ideal on κ とする. Pを κ-chain condition を満足する p.o. set とする. I が precipitous になるための、必要十分条件は、$\Vdash$" Iで生成されたκ上の ideal が precipitous" である.

(Iが precipitous であるとは、$Ult_{W_I}(V)$ が well-founded である事である).

証明は前節の補題4より明らかである

定理2. κを regular uncountable cardinal, Tを κ上の κ-saturated normal ideal とする. その時、

κ上の thin sets が precipitous であるための必要十分条件は、$\{\alpha<\kappa;\ \alpha$上の thin sets の ideal が precipitous$\}$ が T-measure one を持つ事である.

参考文献.

[1]. T. Jech and K. Prikry, Ideal of sets and the power set operation, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 593-595.

[2] T. Jech, M. Magidor, W. Mitchell and K. Prikry. Precipitous ideals, to appear.

[3]. Y. Kakuda. On a condition for Cohen extensions which preserve precipitous ideals.